حل نظری طول تغییر شکل ارتجاعی-خمیری با کارسختی خطی در شکل‌دهی غلتکی یک مقطع کانالی*

روح‌اله عزیزی تفتی[۱]   حسن مسلمی نائینی[۲]   مهدی سلمانی تهرانی[۳]   محمدمهدی کسایی[٤]

چکیده *تعیین طول تغییر شکل از نخستین مراحل طراحی فرآیند شکل‌دهی غلتکی به شمار می‌رود. دست‌رسی به روابطی ساده و صریح که بدون نیاز به سعی و خطای کارگاهی یا شبیه‌سازی‌های زمان‌بر اجزای محدود طول تغییر شکل را پیش‌بینی کنند بسیار مورد توجه صنایع می‌باشد. در این مقاله سعی شد تا با در نظر گرفتن خواص ارتجاعی و رفتار کارسختی ورق در کنار مشخصات هندسی یک مقطع کانالی، تغییر شکل ورق مورد مطالعه قرار گیرد. در این راستا، با استفاده از مدل ماده ارتجاعی-خمیری با کارسختی خطی، رابطه‌هایی برای کار مصرفی در تغییر شکل‌های کشیدگی طولی بال و خمش عرضی در خط خم ارائه شد و در نهایت، رابطه‌ای برای طول تغییر شکل توسعه یافت. نتایج نشان داد که زاویه‌ی شکل‌دهی، طول بال و مدول یانگ طول تغییر شکل را افزایش می‌دهند و ضخامت ورق، استحکام تسلیم اولیه و مدول مماسی ارتجاعی-خمیری طول تغییر شکل را کاهش می‌دهند. نسبت پواسون اثری روی طول تغییر شکل ندارد و افزایش نسبت شعاع خم به ضخامت ورق، طول تغییر شکل را افزایش می‌دهد. در نظر گرفتن خواص ارتجاعی و رفتار کارسختی باعث می‌شود تا طول تغییر شکل از طول تغییر شکل صلب-خمیری پیشنهادی توسط باتاچاریا، کوچک‌تر باشد.*

واژه‌های کلیدی شکل‌دهی غلتکی، طول تغییر شکل، ماده‌ی ارتجاعی-خمیری، کارسختی خطی.

Theoretical Solution of Linear Hardening Elastic-plastic Deformation Length for a Roll Formed Channel

R. Azizi Tafti   H. Moslemi Naeini   M. Salmani Tehrani   M.M. Kasaei

Abstract *Determination of the deformation length is one of the first steps in roll forming design. Roll forming industries are very interested in explicit simple relationsfor prediction the deformation length without using trail-and-error methods at workshop or time consuming finite element simulations. In this paper, elastic properties and work-hardening behaviour of the strip are considered in addition to geometric specifications of a channel section in order to study the strip deformation. Some relations are introduced for the deformation work consumed during the longitudinal stretching of the flange and the transverse bending of the bend line for a linear hardening elastic-plastic strip. Finally, a relation are developed for the deformation length. Theoretical results show that the forming angle, the flange length and the Young's modulus increase the deformation length and the strip thickness, the initial strength and the tangential modulus at the elastic-plastic range decrease the deformation length. The Poisson's ratio has no effect on the deformation length.However, the bend radius to the strip thickness ratio increases the deformation length. The elastic properties and work-hardening behaviour result in a deformation length which is shorter than the rigid–perfectly plastic deformation length which was proposed by Bhattacharyya.*

Key Words Roll forming; Deformation length; Elastic-plastic material; Linear hardening.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۳/۲٤ و تاریخ پذیرش آن ۱۳۹۱/۹/۲۹ می‌باشد.

(۱) دانشجوی دکتری، گروه ساخت و تولید، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس.

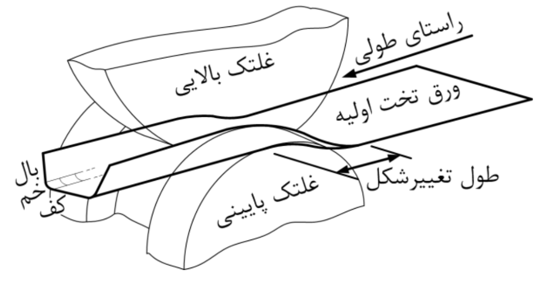
(۲) نویسنده‌ی مسؤول: استاد، گروه ساخت و تولید، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس.

(۳) استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

(٤) دانشجوی دکتری، گروه ساخت و تولید، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس.

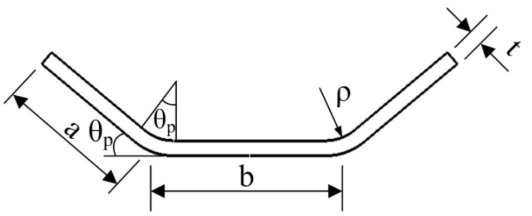
مقدمه

در فرآیند شکل‌دهی غلتکی سرد، ورق با عبور از یک سری ایستگاه‌های متوالی به تدریج به محصول نهایی تبدیل می‌شود. در هر ایستگاه حداقل دو غلتک بالایی و پایینی، نری و مادگی، وظیفه شکل‌دهی را بر عهده دارند که در صورت نیاز غلتک‌های کناری نیز افزوده می‌شوند. طول تغییرشکل در این فرآیند فاصله‌ای است قبل از ایستگاه شکل‌دهی که تغییرشکل از آن‌جا شروع می‌شود و تا ایستگاه ادامه می‌یابد. شکل (۱) شمایی از تغییرشکل ورق را به همراه طول تغییرشکل و ناحیه‌های مختلف یک کانال در اولین ایستگاه شکل‌دهی نشان می‌دهد. طول تغییرشکل یکی از کمیت‌های تأثیرگذاری است که دانستن مقدار دقیق آن در طراحی و زمان‌بندی فرآیند شکل‌دهی غلتکی سرد بسیار مهم است. اگر فاصله‌ی بین ایستگاه‌ها خیلی بزرگ‌تر از طول تغییرشکل باشد، از یک سو، طول خط تولید زیاد می‌شود و سرعت تولید کاهش می‌یابد و از سوی دیگر، عیب‌هایی مثل برگشت‌فنری مسأله‌ساز می‌شوند. اگر فاصله‌ی بین ایستگاه‌ها از طول تغییرشکل کوچک‌تر باشد، از یک سو، شکل‌دهی در یک ایستگاه روی ایستگاه قبل اثر می گذارد و کنترل فرآیند را دشوار می‌کند و از سویی، زمینه برای بروز عیب‌هایی مثل چین‌خوردگی لبه ورق فراهم می‌شود.



شکل ۱ شمایی از تغییرشکل و ناحیه‌های مختلف یک کانال

مقطع محصولات فرآیند شکل‌دهی غلتکی در راستای طولی ثابت است و این محصولات از نظر طول محدودیتی ندارند. تغییرات ناچیز ضخامت ورق در حین فرآیند قابل صرف‌نظر هستند. در شکل (۲) مقطع یک کانال به همراه مشخصات هندسی آن نشان داده شده است.



شکل ۲ مشخصات هندسی مقطع یک کانال

باتاچاریا و همکاران [1] رابطه‌ی (۱) را برای طول تغییرشکل (L) یک کانال متقارن ارائه کردند. هم‌چنان که مشاهده می‌شود در رابطه‌ی (۱) اثری از خواص ماده دیده نمی‌شود زیرا ماده‌ی صلب-خمیری کامل فرض شده است. هر چند، واضح است که خواص ماده روی طول تغییرشکل تأثیری غیر قابل انکار دارند.

$$L = a\sqrt{\frac{8a\,\theta_p}{3t}} \qquad (۱)$$

بر اساس رابطه‌ی (۱)، طول بال (a) و زاویه شکل‌دهی (θ_p) طول تغییرشکل را افزایش و ضخامت ورق (t) آن را کاهش می‌دهد. باتاچاریا و همکاران [2] با استفاده از طول تغییرشکل، نیروی وارد شده به غلتک‌ها در حین شکل‌دهی را محاسبه کردند. زو [3] نیز ماده را صلب-خمیری فرض کرد و با در نظر گرفتن شعاع غلتک مادگی، r، رابطه‌ی (۲) را برای طول تغییرشکل یک کانالی پیشنهاد داد.

$$L = \sqrt{\frac{a\sin\theta_p}{\cos^2\theta_p}\left(a\sin\theta_p + 2r\cos\theta_p\right)} \qquad (۲)$$

طول تغییرشکل در رابطه‌ی (۲) نه تنها مستقل از

خواص ورق است بلکه ضخامت ورق نیز روی آن اثری ندارد. با توجه به رابطه‌ی (۲)، طول بال، شعاع غلتک مادگی (r) و زاویه‌ی شکل‌دهی طول تغییرشکل را افزایش می‌دهند. پنتون و همکاران [4] رابطه‌هایی را برای کرنش و کار تغییرشکل با فرض ماده‌ی صلب-خمیری کامل ارائه کردند. آن‌ها چهار نوع تغییرشکل اساسی در فرآیند شکل‌دهی غلتکی را معرفی کردند که عبارتند از کشیدگی طولی، خمش طولی، خمش عرضی و برش. نفوسی و همکاران [5-7] روشی مبتنی بر نرخ کرنش و توان شکل‌دهی را برای پیش‌بینی طول تغییرشکل کانال پیشنهاد کردند و ورق را صلب-خمیری با کارسختی توانی در نظر گرفتند. بر اساس نتایج آن‌ها، طول تغییرشکل در حدود زاویه‌ی 40° به یک مقدار بیشینه رسیده است و عرض ورق و توان کارسختی طول تغییرشکل را افزایش می‌دهد. مالکیان و دانشی [۸] طول تغییرشکل را به صورت نظری با فرض ماده‌ی صلب-خمیری و با کارسختی توانی بررسی کردند. آن‌ها نتیجه گرفتند که توان کارسختی و شعاع خم طول تغییرشکل را افزایش می‌دهد. هونگ و همکاران [9] کمیت‌های مؤثر بر طول تغییرشکل را با استفاده از روش اجزای محدود و با فرض ماده‌ی صلب-خمیری بررسی کردند. آن‌ها گزارش دادند که تأثیر توان کارسختی بر روی طول تغییرشکل بسیار بیش‌تر از تأثیر ضخامت ورق است. هم‌چنین، افزایش توان کارسختی طول تغییرشکل را زیاد می‌کند. لیندگرن [10] فرآیند شکل‌دهی غلتکی را به صورت سه‌بعدی با استفاده از روش اجزای محدود شبیه‌سازی کرد. هر چند وی طول تغییرشکل را مطالعه نمود اما رابطه‌ای صریح برای آن ارائه نکرد. لیندگرن [11]، با استفاده از شبیه‌سازی اجزای محدود و به کمک طراحی آزمایش، طول تغییرشکل پیشنهادی توسط باتاچاریا را بهبود بخشید و رابطه‌ی (۳) را برای طول تغییرشکل پیشنهاد داد.

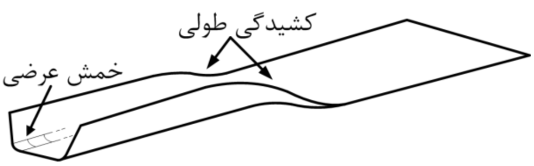
$$L = 12\frac{a^{0.8}\,\theta_p^{0.41}\,Y^{0.07}}{t^{0.25}} \qquad (۳)$$

که در این رابطه Y استحکام تسلیم ورق است. بر اساس رابطه‌ی (۳)، افزایش طول بال، زاویه‌ی شکل‌دهی و استحکام تسلیم و کاهش ضخامت ورق باعث افزایش طول تغییرشکل می‌شود. لیندگرن هیچ توضیحی در مورد علت افزایش طول تغییرشکل با افزایش استحکام تسلیم نداده است.

بر اساس مطالعات نویسندگان این مقاله، هر چند تاکنون محققان اندکی روی طول تغییرشکل متمرکز شده‌اند، هنوز رابطه‌ای صریح برای طول تغییرشکل ارائه نشده است که تأثیر کمیت‌های هندسی و جنس ورق را بیان کند. در این مقاله سعی شده است تا با در نظر گرفتن کمیت‌های هندسی و نیز خواص ارتجاعی و خمیری ورق، رابطه‌ای صریح برای طول تغییرشکل ارائه شود تا نیاز به انجام شبیه‌سازی‌های زمان‌بر اجزای محدود مرتفع شود. بنابراین، با در نظر گرفتن کارسختی خطی، رابطه‌هایی برای تنش‌ها، کرنش‌ها و کارهای تغییرشکل ناشی از کشیدگی طولی ناحیه بال و خمش عرض ناحیه خم توسعه یافت و پس از کمینه کردن کار تغییرشکل کل، رابطه‌ای برای طول تغییرشکل ارتجاعی-خمیری به دست آمد. در انتها اثر کمیت‌های تأثیرگذار روی طول تغییرشکل به صورت جداگانه مورد بررسی قرار گرفت.

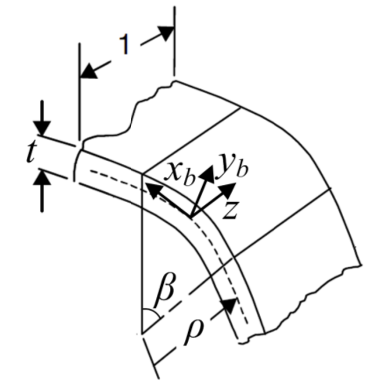
مبانی نظری

در شکل (۳) تغییرشکل‌های کشیدگی طولی در ناحیه‌ی بال و خمش عرضی در ناحیه‌ی خم نشان داده شده‌اند.



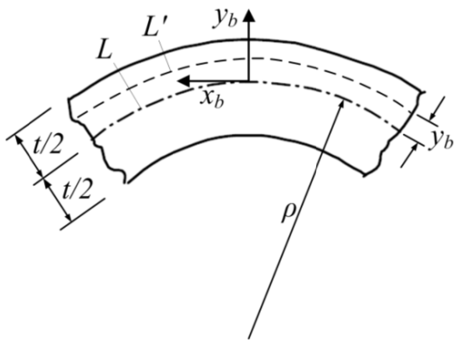
شکل ۳ کشیدگی طولی در بال و خمش عرضی در خط خم

تغییرشکل خمش عرضی در ناحیه‌ی خط خم. به منظور محاسبه‌ی کار مصرفی در ناحیه‌ی خم، المانی از خم به طول واحد در نظر گرفته شد که در شکل (٤) نشان داده شده است.



شکل ٤ المانی از خم به طول واحد

از آن‌جا که در حین فرآیند شکل‌دهی غلتکی سرد، کرنش در راستای طولی، z_b، در ناحیه‌ی خم بسیار نزدیک به صفر است [12]، می‌توان خمش عرضی در امتداد خط خم را حالت کرنش صفحه‌ای فرض کرد و المان دوبعدی نشان داده‌شده در شکل (٥) را به جای المان سه بعدی در نظر گرفت.

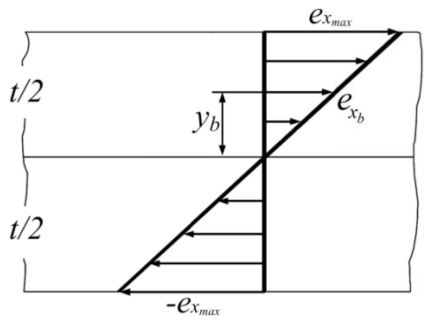


شکل ٥ المانی دو بعدی از خم

با توجه به این المان، در حین خمش طول لایه خنثی، L، ثابت می‌ماند. اگر طول لایه‌ای که در فاصله‌ی y_b از لایه‌ی خنثی قرار دارد L' و شعاع خم در لایه خنثی ρ باشد، کرنش ناشی از خمش عرضی، e_{x_b}، از رابطه‌ی (٤) به دست می‌آید.

$$e_{x_b} = \frac{y_b}{\rho} \qquad (٤)$$

با توجه به رابطه‌ی (٤)، توزیع کرنش خمشی در راستای ضخامت ورق تابعی خطی از فاصله تا لایه خنثی می‌باشد که در شکل (٦) نشان داده شده است.



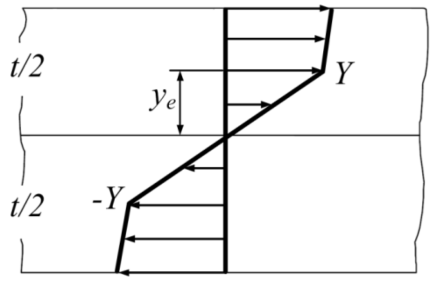
شکل ٦ توزیع کرنش ناشی از خمش عرضی در راستای ضخامت ورق

از آن‌جا که ورق یک پوسته‌ی نازک فرض شد، فشار وارد از سوی غلتک‌ها به آن در راستای ضخامت در مقایسه با تنش‌هایی که در نتیجه تغییرشکل در ورق به وجود می‌آیند ناچیز بود و می‌توان خمش عرضی را تنش صفحه‌ای فرض کرد. بنابراین، با فرض حالت‌های کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای، می‌توان از مدول یانگ معادل استفاده کرد که توسط رابطه‌ی (٥) تعریف می‌شود.

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad (٥)$$

که E و ν به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون هستند. در شکل (٧)، توزیع تنش در راستای ضخامت

برای یک ماده ارتجاعی-خمیری با کارسختی خطی نشان داده شده است.



شکل ۷ توزیع تنش ناشی از خمش در راستای ضخامت ورق برای ماده ارتجاعی-خمیری با کارسختی خطی

همان‌طور که مشاهده می‌شود در مجاورت لایه‌ی خنثی یک هسته‌ی ارتجاعی قرار دارد و سپس از فاصله‌ی y_e، تغییرشکل ارتجاعی-خمیری به وجود می‌آید که شیب تغییرات تنش در آن نسبت به ناحیه‌ی ارتجاعی کم‌تر است. رابطه (٦) توزیع تنش در راستای ضخامت را توصیف می‌کند.

$$\sigma_{x_b} = \begin{cases} \left[1-\left(1-\frac{y_b}{y_e}\right)\frac{E_p}{E'}\right]Y & y_e \le y_b \le \frac{t}{2} \\ \frac{y_b}{y_e}Y & -y_e \le y_b \le y_e \\ \left[\left(1+\frac{y_b}{y_e}\right)\frac{E_p}{E'}-1\right]Y & -\frac{t}{2} \le y_b \le -y_e \end{cases} \qquad (٦)$$

که در آن، E_p، Y و y_e به ترتیب مدول مماسی ارتجاعی-خمیری یا شیب منحنی تنش-کرنش در ناحیه‌ی ارتجاعی-خمیری، استحکام تسلیم اولیه ورق و حد ارتجاعی در مرز ناحیه‌های ارتجاعی و ارتجاعی-خمیری در راستای ضخامت هستند. y_e، با استفاده از رابطه‌های (۵ و ٤) و نیز قانون هوک، از رابطه‌ی (۷) قابل محاسبه است.

$$y_e = \rho\left(1-\nu^2\right)\frac{Y}{E} \qquad (۷)$$

به این ترتیب می‌توان با داشتن توزیع تنش در راستای ضخامت، گشتاور لازم برای خمش در واحد طول را با استفاده از رابطه‌ی (۸) به دست آورد.

$$M_{tb} = \int \sigma_{x_b} y_b dy_b = \frac{Yt^2}{12}\Phi \qquad (۸)$$

که در آن ثابت Φ برابر است با:

$$\Phi = 4\left(\frac{E_p}{E'}-1\right)G^2 + \left(\frac{1}{G}-3\right)\frac{E_p}{E'}+3 \qquad (۹)$$

و ثابت G نسبت حد ارتجاعی به ضخامت ورق است و از رابطه‌ی (۱۰) محاسبه می‌شود.

$$G = \frac{y_e}{t} = \left(1-\nu^2\right)\frac{\rho}{t}\frac{Y}{E} \qquad (۱۰)$$

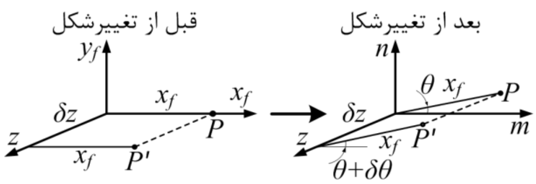
در محصولات شکل‌دهی غلتکی، شعاع خم متداول در حدود ضخامت ورق است. بنابراین، هرچند از دیدگاه نظری G می‌تواند از صفر تا ۰/۵ تغییر کند، اما مقدار عملی G برای فولادهای نرم کم‌تر از ۰/۰۰۲ و برای فولادهای با استحکام بسیار بالا کم‌تر از ۰/۱ است.

لیندگرن [13] و اینگوارسون [14] سه راهکار را برای طراحی تغییرات شعاع خم در فرآیند شکل‌دهی غلتکی سرد پیشنهاد دادند که عبارتند از؛ ثابت بودن شعاع خم، ثابت بودن طول خم و متغیر بودن شعاع و طول خم در ایستگاه‌های مختلف. در عین حال، آن‌ها مزیتی را برای هر راهکار نسبت به دو راهکار دیگر بیان نکردند. در این مقاله، به منظور ساده‌تر شدن معادله‌ها، راهکار اول انتخاب شد که البته می‌توان رابطه‌ها را برای دو راهکار دیگر نیز توسعه داد. کار مصرف‌شده در تغییرشکل ناشی از خمش عرضی در واحد طول از خط خم را می‌توان از رابطه‌ی (۱۱) به دست آورد.

$$W_{tb} = \int M_{tb}\, d\theta = \frac{Yt^2}{12}\Phi\theta \qquad (۱۱)$$

در محاسبه‌ی کار خمشی از فرض ثابت بودن ضخامت در حین تغییرشکل‌دهی غلتکی سرد استفاده شده است.

تغییرشکل کشیدگی طولی در ناحیه‌ی بال. به منظور بررسی تغییرشکل ورق در ناحیه‌ی بال، دو نقطه دل‌خواه P و P' بر روی لایه‌ی میانی ورق با فاصله‌ی δz نسبت به هم و به فاصله‌ی x_f از خط خم در نظر گرفته شدند. شکل (۸) این دو نقطه را نشان می‌دهد. پس از تغییرشکل که ورق به اندازه‌ی x_f جلورفت و زاویه‌ی بال با افق θ شد، مختصات جدید این دو نقطه به ترتیب $(x_f \cos\theta, x_f \sin\theta, z)$ و $(x_f \cos(\theta+\delta\theta), x_f \sin(\theta+\delta\theta), z+\delta z)$ خواهد بود.



شکل ۸ موقعیت دو نقطه دل‌خواه از بال، قبل و بعد از شکل‌دهی غلتکی سرد

بنابراین، می‌توان کرنش ناشی از کشیدگی طولی را به کمک رابطه‌ی (۱۲) به دست آورد. مشابه رابطه‌ی (۱۲) توسط باتاچاریا و همکاران [1] و پنتون و همکاران [15] گزارش شده است. در محاسبه‌ی این کرنش فرض شده است که نقاط واقع بر روی بال در حین تغییرشکل مسیری مارپیچ را بر روی یک استوانه طی می‌کنند که در نتیجه، فاصله‌ی آن‌ها از خط خم ثابت می‌ماند. هم‌چنین مقاطع عرضی در حین تغییرشکل به صورت تخت و عمود بر هم باقی می‌مانند و فاصله‌ی آن‌ها تغییر نمی‌کند.

$$e_{z_{ls}} = \frac{1}{2}x_f^2\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 \qquad (۱۲)$$

توزیع تنش در ناحیه‌ی بال را می‌توان به کمک رابطه‌ی (۱۳) بیان کرد که در آن x_e مرز بین ناحیه‌های ارتجاعی و ارتجاعی-خمیری در روی بال در نتیجه کشیدگی طولی است.

$$\sigma_{z_{ls}} = \begin{cases} \dfrac{x_f}{x_e}Y & 0 \le x_f \le x_e \\ \left[1-\left(1-\dfrac{x_f}{x_e}\right)\dfrac{E_p}{E}\right]Y & x_e \le x_f \le a \end{cases} \qquad (۱۳)$$

در شروع تغییرشکل، در فاصله L قبل از ایستگاه شکل‌دهی، تمام تغییرشکل در امتداد بال ارتجاعی است. در محل ایستگاه، در صفحه‌ی گذرنده از خط مرکزی غلتک‌ها، طول ناحیه‌ی ارتجاعی را می‌توان از روی نسبت کرنش ارتجاعی ورق e_y و کرنش بیشینه‌ی e_{peak} تعیین کرد. بنابراین، دو شرط مرزی را می‌توان برای طول ناحیه‌ی ارتجاعی در نظر گرفت که در رابطه‌ی (۱٤) بیان شده‌اند.

$$x_e = \begin{cases} a & \text{at } z = 0 \\ ma & \text{at } z = L \end{cases} \qquad (۱٤)$$

که m کمیتی بدون بعد است که با رابطه‌ی (۱۵) تعریف می‌شود.

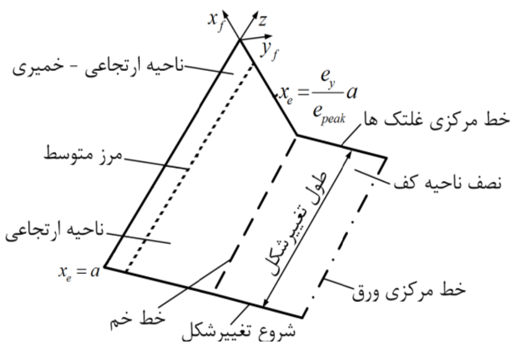
$$m = \frac{e_y}{e_{peak}} \qquad (۱۵)$$

اگر مقدار m بزرگ‌تر یا مساوی با یک باشد، تغییرشکل در همه‌ی بال ارتجاعی است و اگر m کوچک‌تر از ۱ باشد بخشی از بال تحت تغییرشکل ارتجاعی و بقیه آن تحت تغییرشکل ارتجاعی-خمیری خواهد بود. کرنش بیشینه‌ای که در حین کشیدگی طولی در لبه‌ی ورق ایجاد می‌شود توسط باتاچاریا [2] به صورت رابطه‌ی (١٦) پیشنهاد شده است.

$$e_{peak}=\sqrt{1+\frac{3t}{4a\theta}(1-\cos\theta)}-1 \qquad (۱۶)$$

اگر فرض شود که توزیع ناحیه‌ی ارتجاعی بر روی بال به صورت خطی باشد، با فرض ثابت بودن مساحت ناحیه‌ی ارتجاعی، رابطه‌ی (۱۷) به‌عنوان توزیع متوسطی از ناحیه‌ی ارتجاعی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. شکل (۹) توزیع متوسط ناحیه‌ی ارتجاعی را به‌همراه شرایط مرزی و ناحیه‌های ارتجاعی و ارتجاعی-خمیری نشان می‌دهد.

$$x_e=\left(\frac{m+1}{2}\right)a \qquad (۱۷)$$



شکل ۹ توزیع خطی و متوسط ناحیه‌ی ارتجاعی بر روی بال

به این ترتیب می‌توان کار مصرفی در تغییرشکل کشیدگی طولی در ناحیه بال را با استفاده از رابطه‌ی (۱۸) تعیین کرد.

$$W_{ls}=\frac{Yta^3}{192}\Omega\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 \qquad (۱۸)$$

که در آن ثابت Ω از رابطه‌ی (۱۹) محاسبه می‌شود.

$$\Omega=\left[32-(m+1)^3\right]\left(1-\frac{E_p}{E}\right)+\frac{48}{m+1}\frac{E_p}{E} \qquad (۱۹)$$

در صورتی که تغییرشکل در سرتاسر بال به صورت ارتجاعی باشد، کار ناشی از کشیدگی طولی ناحیه بال در واحد طول برابر است با:

$$W_{ls_e}=\frac{Yta^3}{8}\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 \qquad (۲۰)$$

کمینه‌سازی کار تغییرشکل کل و یافتن طول تغییرشکل. همان‌طور که رابطه‌ی (۲۱) نشان می‌دهد کار تغییرشکل کل را می‌توان از جمع کار خمشی در امتداد خط خم و کار ناشی از کشیدگی طولی در ناحیه‌ی بال به دست آورد.

$$W_t=\int^{L}\left[W_{ls}+W_{tb}\right]dz \qquad (۲۱)$$

به‌منظور تعیین توزیع زاویه‌ی بال با افق در امتداد طول تغییرشکل، می‌توان از رابطه‌ی اویلر برای کمینه کردن کار تغییرشکل کل استفاده کرد. رابطه‌ی اویلر و تابع اویلر به ترتیب توسط رابطه‌های (۲۳ و ۲۲) بیان می‌شوند.

$$\frac{\partial F}{\partial\theta}-\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial\theta'}\right)=0 \qquad (۲۲)$$

$$F(z,\theta(z),\theta'(z))=\frac{Yt^2}{12}\Phi\theta+\frac{Yta^3}{192}\Omega\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 \qquad (۲۳)$$

پس از جای‌گذاری رابطه‌ی (۲۳) در رابطه‌ی (۲۲) و انتگرال‌گیری، رابطه‌ی (۲٤) به دست می‌آید.

$$\theta(z)=\frac{4t}{a^3}\frac{\Phi}{\Omega}z^2+c_1z+c_2 \qquad (۲٤)$$

یک شرط مرزی صفر بودن شیب زاویه‌ی خم در ابتدای تغییرشکل است. در صورتی که این شرط برآورده شود:

$$\frac{d\theta(0)}{dz} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \qquad (۲۵)$$

شرط مرزی دیگری که می‌توان در نظر گرفت صفر بودن زاویه‌ی خم در ابتدای تغییرشکل است. اعمال این شرط در نهایت به رابطه‌ی (۲۷) منجر می‌شود که توزیع زاویه‌ی خم در امتداد طول تغییرشکل را نشان می‌دهد.

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \qquad (۲۶)$$

$$\theta(z) = \frac{4t}{a^3}\frac{\Phi}{\Omega}z^2 \qquad (۲۷)$$

برای تعیین طول تغییرشکل، شرط مرزی سومی را می‌توان لحاظ کرد. بر اساس این شرط مرزی، زاویه‌ی بال در ایستگاه شکل‌دهی با زاویه غلتک‌ها برابر است، $\theta(L) = \theta_p$، که با برآورده ساختن این شرط رابطه‌ی (۲۸) برای طول تغییرشکل به دست می‌آید.

$$L = \sqrt{\frac{\Omega}{4\Phi}}\sqrt{\frac{a^3\theta_p}{t}} \qquad (۲۸)$$

بحث در مورد طول تغییرشکل ارتجاعی-خمیری

طول تغییرشکل ارتجاعی (تغییرشکل ارتجاعی در بال). در صورتی که تغییرشکل در همه‌ی بال به‌صورت ارتجاعی باشد، $m \geq 1$، طول تغییرشکل ارتجاعی از رابطه‌ی (۲۹) به دست می‌آید. این شرایط زمانی حاصل می‌شود که زاویه‌ی شکل‌دهی کوچک، طول بال بلند و ضخامت ورق به اندازه‌ی کافی کوچک باشد تا تنش بیشینه در تمام بال از استحکام تسلیم ورق کم‌تر شود. در این صورت رابطه‌ی (۲۹) باید به جای رابطه‌ی (۲۸) استفاده گردد.

$$L = \frac{\sqrt{\frac{a^3\theta_p}{t}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{E_p}{E'} - 1\right)G^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{G} - 3\right)\frac{E_p}{E'} + \frac{1}{2}}} \qquad (۲۹)$$

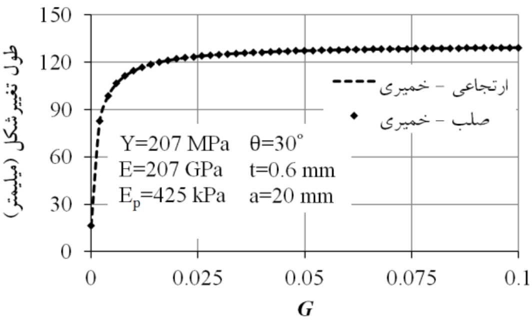
طول تغییرشکل ارتجاعی (تغییرشکل ارتجاعی در بال و خط خم). اگر علاوه بر بال، تغییرشکل در ناحیه‌ی خم هم ارتجاعی باشد رابطه‌ی (۳۰) طول تغییرشکل را نتیجه می‌دهد.

$$L = \sqrt{\frac{3a^3\theta_p}{t}} \qquad (۳۰)$$

اما در عمل چنین اتفاقی رخ نمی‌دهد زیرا به دلیل کوچک بودن نسبت شعاع خم به ضخامت ورق در محصولات شکل‌دهی غلتکی، مقدار G بسیار کوچک‌تر از ۰/۵ بوده و ناحیه‌ی ارتجاعی در راستای ضخامت در خمش عرضی بسیار کوچک و قابل صرف‌نظر است. بنابراین می‌توان ماده را در خمش عرضی صلب-خمیری در نظر گرفت. با فرض مدل صلب-خمیری در خمش عرضی و مدل ارتجاعی-خمیری با کارسختی خطی در کشیدگی طولی، رابطه‌ی (۲۸) به رابطه‌ی (۳۱) تبدیل می‌شود.

$$L = \sqrt{\frac{\left[8 - \frac{(m+1)^3}{4}\right]\left(1 - \frac{E_p}{E}\right) + \frac{12}{m+1}\frac{E_p}{E}}{3 + \frac{E_p}{Y}\frac{t}{\rho}}}\sqrt{\frac{a^3\theta_p}{t}} \qquad (۳۱)$$

به منظور بررسی دقت رابطه‌ی (۳۱)، جواب‌های به دست آمده از این رابطه به همراه جواب‌های رابطه‌ی (۲۸) بر حسب تغییرات G در شکل (۱۰) رسم شده‌اند. محدوده تغییرات G دو برابر محدوده‌ی عملی در نظر گرفته شده است.



شکل ۱۰ مقایسه‌ی طول تغییرشکل رابطه‌ی (۳۱) با رابطه‌ی (۲۸)

در شکل (۱۰) مشخص است که در محدوده‌ی مقدارهای عملی G، رابطه‌ی (۳۱) طول تغییرشکل را به خوبی پیش‌بینی می‌کند.

طول تغییرشکل ارتجاعی-خمیری کامل. در صورتی که رفتار ورق به ماده‌ی ارتجاعی-خمیری کامل نزدیک باشد، رابطه‌ی (۲۸) به صورت رابطه‌ی (۳۲) ساده می‌شود.

$$L=\sqrt{\frac{32-(m+1)^3}{12}}\sqrt{\frac{a^3\theta_p}{t}} \qquad (۳۲)$$

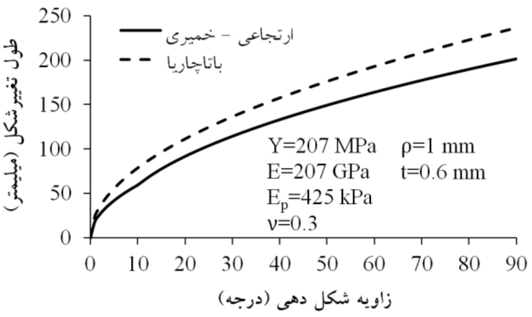
طول تغییرشکل صلب-خمیری کامل. اگر رفتار ورق را بتوان با مدل صلب-خمیری کامل توصیف نمود رابطه‌ی (۳۳) به دست می‌آید که در واقع همان رابطه‌ی باتاچاریا است که در رابطه‌ی (۱) ارایه شد، است.

$$L=\sqrt{\frac{8a^3\theta_p}{3t}} \qquad (۳۳)$$

بررسی اثر کمیت‌های مختلف روی طول تغییرشکل ارتجاعی-خمیری

به طور کلی، با توجه به نتایج، می‌توان گفت که چون در محاسبه‌ی طول تغییرشکل باتاچاریا از اثرهای ارتجاعی و کارسختی صرف‌نظر شده است، طول تغییرشکل ارتجاعی-خمیری از طول تغییرشکل باتاچاریا کوچک‌تر است. در این بخش، تأثیر هر کدام از کمیت‌های مؤثر به صورت جداگانه، با ثابت نگه داشتن بقیه‌ی کمیت‌ها، بررسی شده است. شایان ذکر است که خواص ماده‌ی استفاده‌شده متعلق به فولاد نرم SAE 1020 [16] است.

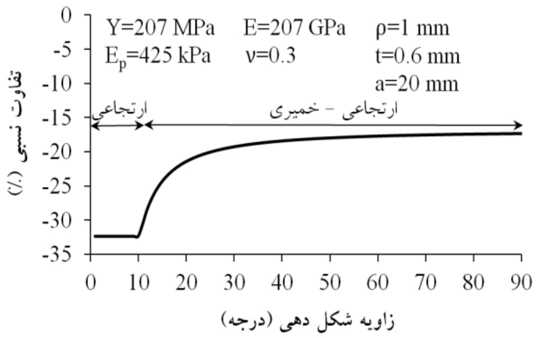
زاویه‌ی شکل‌دهی. همان‌طور که در شکل (۱۱) مشاهده می‌شود، زاویه‌ی شکل‌دهی هر دو طول تغییرشکل ارتجاعی-خمیری و باتاچاریا را افزایش می‌دهد. در زاویه‌های کم‌تر از ۱۰°، با توجه به مقدار m، تغییرشکل بال به طور کامل زیر حد ارتجاعی است و طول تغییرشکل از رابطه‌ی (۲۹) محاسبه شده است که البته از نظر عملی این زاویه‌ها به‌ندرت مورد استفاده قرار می‌گیرند.



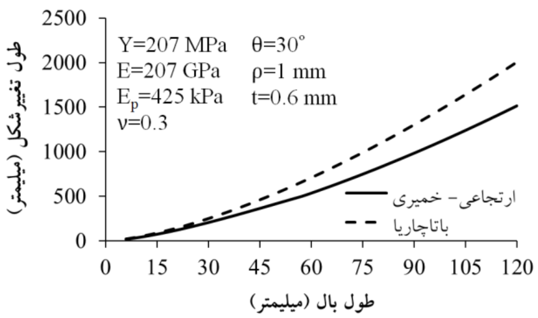
شکل ۱۱ اثر زاویه‌ی شکل‌دهی روی طول تغییرشکل

در شکل (۱۲) تفاوت نسبی طول‌های تغییرشکل ارتجاعی-خمیری و باتاچاریا بر حسب زاویه‌ی شکل‌دهی نشان داده شده است. در این شکل، ارتجاعی یا ارتجاعی-خمیری بودن تغییرشکل بر حسب زاویه‌ی شکل‌دهی مشخص شده است. در زاویه‌های شکل‌دهی کم‌تر از ۱۰° که تغییرشکل بال ارتجاعی می‌باشد، تفاوت نسبی ثابت است زیرا بقیه‌ی کمیت‌ها در رابطه‌های (۲۹ و ۱) ثابت هستند و از سوی دیگر، تفاوت نسبی بیشینه است چرا که اثرهای ارتجاعی در طول تغییرشکل باتاچاریا نادیده گرفته شده‌اند. هر چند با افزایش زاویه‌ی شکل‌دهی، به دلیل کم شدن اثرهای ارتجاعی، تفاوت نسبی کاهش می‌یابد اما با افزایش بیش‌تر زاویه شکل‌دهی، به علت افزایش اثر کارسختی، مقاومت ورق در برابر تغییرشکل افزایش می‌یابد و تفاوت نسبی به سمت یک مقدار ثابت هم‌گرا می‌شود.

اثر طول بال. با توجه به شکل (۱۳) افزایش طول بال، طول‌های تغییرشکل ارتجاعی-خمیری و باتاچاریا را زیاد می‌کند. با افزایش طول بال، کرنش بیشینه در لبه کاهش می‌یابد و بخش بیش‌تری از بال تحت تغییرشکل ارتجاعی قرار می‌گیرد که در نتیجه تفاوت طول تغییرشکل ارتجاعی-خمیری با طول تغییرشکل باتاچاریا زیاد می‌شود. تغییرشکل در بال‌های با طول بیش‌تر از ۵۸mm کاملاً ارتجاعی است.

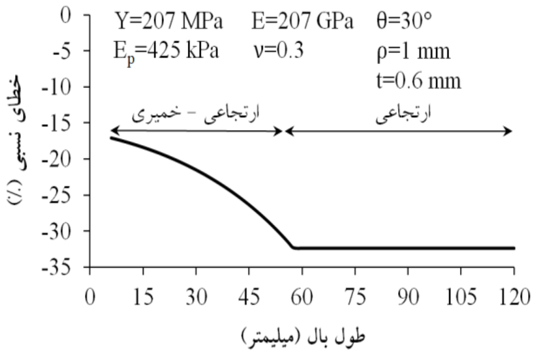


شکل ۱۲ تفاوت نسبی طول تغییرشکل ارتجاعی-خمیری و باتاچاریا بر حسب زاویه‌ی شکل‌دهی

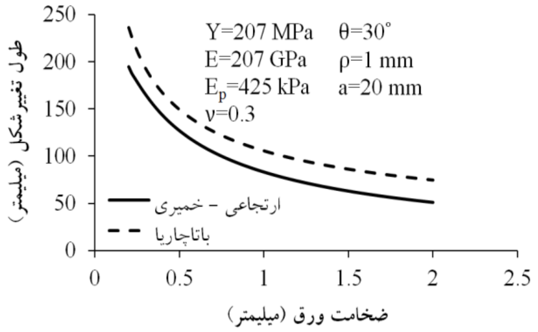


شکل ۱۳ اثر طول بال روی طول تغییرشکل

اثرهای متقابل خواص ارتجاعی و کارسختی بر تفاوت نسبی طول‌های تغییرشکل ارتجاعی-خمیری و باتاچاریا بر حسب طول بال در شکل (۱۴) مشاهده می‌شود. همان‌طور که در شکل مشخص شده است، در بال‌های بلندتر از ۵۸mm تغییرشکل ارتجاعی است و خواص ارتجاعی علت اختلاف می‌باشد. در عین حال، در بال‌های کوتاه‌تر از ۵۸mm، کارسختی دلیل اصلی تفاوت است.

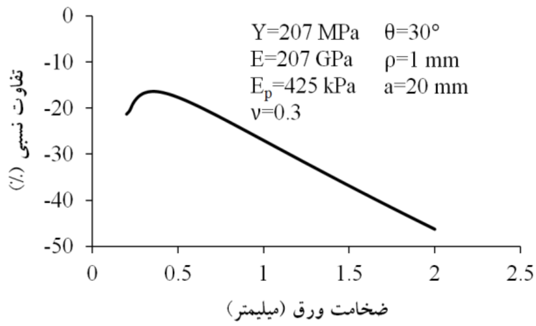


شکل ۱۴ تفاوت نسبی طول تغییرشکل ارتجاعی-خمیری و باتاچاریا بر حسب طول بال



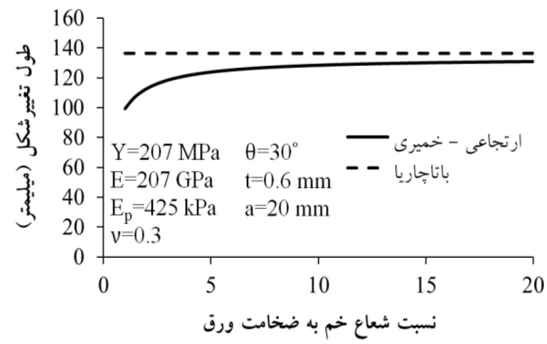
شکل ۱۵ اثر ضخامت ورق روی طول تغییرشکل

اثر ضخامت ورق. از آن‌جا که در این مقاله ورق به صورت یک پوسته‌ی نازک فرض شده است ضخامت را نمی‌توان از ۰/۱ طول بال بیش‌تر در نظر گرفت. با توجه به شکل (۱۵)، افزایش ضخامت ورق، کاهش طول‌های تغییرشکل ارتجاعی-خمیری و باتاچاریا را به دنبال دارد. بر اساس شکل (۱٦) افزایش ضخامت ورق در ضخامت‌های کم‌تر از ۰/٤mm، به دلیل کاهش اثرهای ارتجاعی، تفاوت نسبی را کم می‌کند. اما افزایش ضخامت ورق در ضخامت‌های بالاتر از این مقدار، به علت افزایش اثر کارسختی، تفاوت نسبی را افزایش می‌دهد.



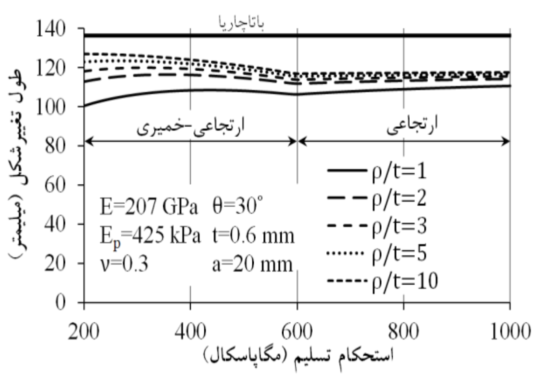
شکل ۱۶ تفاوت نسبی طول تغییرشکل ارتجاعی–خمیری و باتاچاریا بر حسب ضخامت ورق

اثر شعاع خم. در رابطه‌های به‌دست‌آمده برای طول تغییرشکل، شعاع خم به تنهایی ظاهر نشده است و همیشه نسبت آن به ضخامت ورق وجود دارد. در شکل (۱۷) تغییرات طول تغییرشکل بر حسب ضخامت رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت شعاع خم به ضخامت ورق طول تغییرشکل افزایش می‌یابد.



شکل ۱۷ اثر نسبت شعاع خم به ضخامت روی طول تغییرشکل

اثر استحکام تسلیم اولیه. با توجه به شکل (۱۸)، هر چند استحکام تسلیم اولیه اثری روی طول تغییرشکل باتاچاریا ندارد ولی طول تغییرشکل ارتجاعی–خمیری را به‌شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. افزایش نسبت شعاع خم به ضخامت ورق به افزایش طول تغییرشکل می‌انجامد زیرا هر چه این نسبت بیش‌تر شود اثر کارسختی کم‌تر می‌گردد. به طور کلی، با افزایش استحکام تسلیم اولیه، مقاومت ورق به تغییرشکل بیش‌تر شده و طول تغییرشکل کاهش می‌یابد تا جایی که تغییرشکل به طور کامل ارتجاعی شود. از آن به بعد، طول تغییرشکل با تقریب خوبی ثابت و مستقل از استحکام تسلیم اولیه می‌شود. در استحکام‌های تسلیم اولیه بیش‌تر از ٤۰۰MPa، در همه‌ی نسبت‌های شعاع خم به ضخامت، طول تغییرشکل با افزایش استحکام تسلیم اولیه روند کاهشی دارد. اما هنگامی که استحکام تسلیم اولیه کم‌تر از ٤۰۰MPa است، در نسبت‌های شعاع خم به ضخامت کم‌تر از پنج، ناحیه‌های نزدیک به خم و لبه بال بیش‌تر تحت تغییرشکل ارتجاعی–خمیری قرار می‌گیرند و بیش‌تر کارسخت می‌شوند که در نتیجه، مقاومت آن‌ها به تغییرشکل بیش‌تر از بقیه‌ی نواحی بال خواهد بود. با افزایش استحکام تسلیم اولیه این شرایط تغییر می‌کند و مقاومت یک‌نواخت‌تری در سرتاسر بال و خم به وجود می‌آید. بنابراین، با توجه به شکل (۱۸)، می‌توان نتیجه گرفت که در نسبت‌های شعاع خم به ضخامت کم‌تر از پنج، هنگامی که استحکام تسلیم اولیه کم‌تر از ٤۰۰MPa است، برآیند مقاومت در برابر تغییرشکل در استحکام‌های بالاتر، کم‌تر می‌باشد و طول تغییرشکل بیش‌تر است.



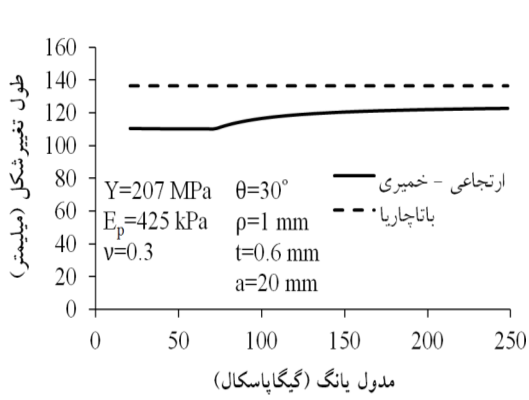
شکل ۱۸ اثر استحکام تسلیم اولیه روی طول تغییرشکل

اثر مدول یانگ. به طور کلی، با افزایش مدول یانگ

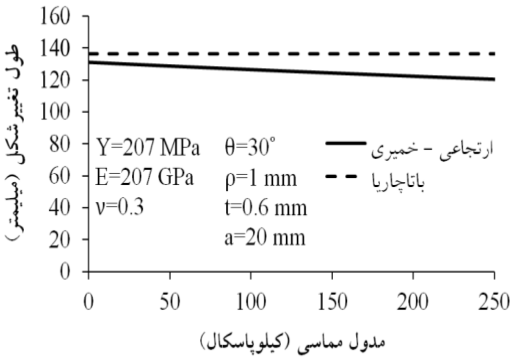
تغییرشکل ارتجاعی کوچک‌تر و ورق راحت‌تر به صورت ارتجاعی-خمیری شکل می‌گیرد که در نتیجه، با توجه به شکل (۱۹)، طول تغییرشکل افزایش می‌یابد. در مدول‌های یانگ کوچک، تغییرشکل ارتجاعی می‌باشد و طول تغییرشکل تحت تأثیر مدول یانگ نیست. با افزایش مدول یانگ، تغییرشکل ارتجاعی-خمیری می‌شود و طول تغییرشکل افزایش می‌یابد. اما زمانی که تغییرشکل ارتجاعی-خمیری شد افزایش بیش‌تر مدول یانگ اثر قابل‌توجهی روی طول تغییرشکل ندارد. در شکل (۱۹) مشاهده می‌شود که طول تغییرشکل باتاچاریا برای مدول‌های یانگ مختلف یکسان است.

اثر مدول مماسی ارتجاعی خمیری. در شکل (۲۰) مشاهده می‌شود که با افزایش مدول مماسی ارتجاعی خمیری، ورق کارسخت‌تر می‌شود؛ تغییرشکل آن دشوارتر و در نتیجه طول تغییرشکل کاهش می‌یابد.

اثر نسبت پواسون. همان طور که در شکل (۲۱) مشاهده می‌شود، نسبت پواسون هیچ اثری روی طول تغییرشکل ندارد. این امر بدان معنی است که تغییرات احتمالی ورق در نتیجه‌ی کشیدگی طولی لبه و یا خمش عرضی در خط خم، بسیار کم و قابل چشم‌پوشی است و طول تغییرشکل را متأثر نمی‌سازد.

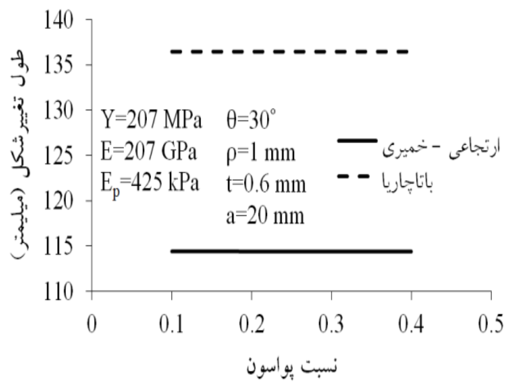


شکل ۱۹ اثر مدول یانگ روی طول تغییرشکل



شکل ۲۰ اثر مدول مماسی ارتجاعی-خمیری روی طول تغییرشکل

اثر نسبت پواسون. همان طور که در شکل (۲۱) مشاهده می‌شود، نسبت پواسون هیچ اثری روی طول تغییرشکل ندارد. این امر بدان معنی است که تغییرات احتمالی ورق در نتیجه‌ی کشیدگی طولی لبه و یا خمش عرضی در خط خم، بسیار کم و قابل چشم‌پوشی است و طول تغییرشکل را متأثر نمی‌سازد.



شکل ۲۱ اثر نسبت پواسون روی طول تغییرشکل

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله، با بررسی نظری تغییرشکل ورق در فرآیند شکل‌دهی غلتکی یک مقطع کانالی، طول تغییرشکل برای ماده‌ای توسعه داده شد که رفتار آن به صورت ارتجاعی-خمیری با کارسختی خطی قابل توصیف باشد. هم‌چنین، با در نظر گرفتن دو نوع تغییرشکل کشیدگی طولی در بال و خمش عرضی،

رابطه‌هایی برای کار تغییرشکل ارائه گردید. نتایج نشان داد که خواص ارتجاعی و رفتار کارسختی تأثیر غیرقابل انکاری بر روی طول تغییرشکل دارند که این نتایج به صورت خلاصه به صورت زیر می‌باشند:

۱. افزایش زاویه‌ی شکل‌دهی، افزایش طول بال و کاهش ضخامت ورق طول تغییرشکل را افزایش می‌دهند.

۲. افزایش نسبت شعاع خم به ضخامت ورق طول تغییرشکل را زیاد می‌کند.

۳. افزایش استحکام تسلیم اولیه، افزایش مدول مماسی ارتجاعی–خمیری و کاهش مدول یانگ به کاهش طول تغییرشکل منجر می‌شود.

٤. نسبت پواسون اثری روی طول تغییرشکل ندارد.

۵. در صورتی که ناحیه‌ی بال تحت تغییرشکل ارتجاعی باشد، طول تغییرشکل مستقل از جنس ورق خواهد بود.

٦. افزایش طول بال و کاهش زاویه‌ی شکل‌دهی سهم تغییرشکل ارتجاعی را افزایش می‌دهد و به افزایش تفاوت طول تغییرشکل ارتجاعی–خمیری با طول تغییرشکل پیشنهادی توسط باتاچاریا منجر می‌شود.

۷. افزایش ضخامت، ورق را بیش‌تر کارسخت می‌کند و تفاوت طول تغییرشکل پیشنهادی در این مقاله را با طول تغییرشکل باتاچاریا زیاد می‌گرداند.

به این ترتیب، می‌توان گفت که ورق‌های با استحکام بالا و نیز ورق‌هایی که قابلیت کارسخت شدن زیادی دارند طول تغییرشکل کوتاه‌تری خواهند داشت. در صورتی که برای این ورق‌ها فاصله‌ی بین ایستگاه‌ها بزرگ‌تر از طول تغییرشکل باشد، برگشت فنری مشکل‌ساز می‌گردد و اگر فاصله بین ایستگاه‌ها کوچک‌تر از طول تغییرشکل باشد چین‌خوردگی لبه مسأله‌ساز می‌شود.

فهرست علائم

t	ضخامت ورق
θ_p	زاویه شکل‌دهی
a	طول بال
b	طول کف
ρ	شعاع خم
r	شعاع غلتک مادگی
Y	استحکام تسلیم
E	مدول یانگ
E'	مدول یانگ معادل
ν	نسبت پواسون
x_b ، y_b	مختصات راستاهای اول ودوم در خم
x_f ، y_f	مختصات راستاهای اول ودوم در بال
z	مختصات راستای سوم
e_{x_b}	کرنش ناشی از خمش عرضی
$e_{z_{ls}}$	کرنش ناشی از کشش طولی
σ_{x_b}	تنش ناشی از خمش عرضی
$\sigma_{z_{ls}}$	تنش ناشی از کشش طولی
y_e	حد ارتجاعی در راستای ضخامت در خمش عرضی
x_e	حد ارتجاعی در راستای عرضی بال در خمش عرضی
M_{tb}	گشتاور لازم برای خمش عرضی در واحد طول
G	نسبت حد ارتجاعی به ضخامت ورق
W_{tb}	کار لازم برای خمش عرضی در واحد طول
W_{ls}	کار لازم برای کشش طولی در واحد طول
W_t	کار مجموع
e_y	کرنش تسلیم
e_{peak}	کرنش بیشینه در کشیدگی طولی
F	تابع اویلر

مراجع

1. Bhattacharyya, D., Smith, P., Yee, C.H., Collins, I.F., "The prediction of deformation length in cold roll forming", *Journal of Mechanical Working Technology,* 9, pp. 181-191, (1984).
2. Bhattacharyya, D., Smith, P., Thadakamalla, S.K., Collins, I.F., Collins, I.F., "The prediction of roll load in cold roll forming", *Journal of Mechanical Working Technology,* 14, pp. 363-379, (1987).
3. Zhu, S., "Theoretical and experimental analysis of roll forming", PhD thesis, University of Auckland, Auckland, New Zealand, (1993)
4. Panton, S.M., Zhu, S.D., Duncan, J.L., "Fundamental deformation types and sectional properties in roll forming", *International Journal Of Mechanical Sciences,* 36 (8), pp. 725–735, (1994).
5. Nefussi, G., Gilormini, P., "A simplified method for the simulation of cold roll forming", *International Journal Of Mechanical Sciences,* 35(10), pp. 867- 878, (1993).
6. Nefussi, G., Proslier, L., Gilormini, P., "A simulation of cold roll forming for elastoplastic materials", *International Journal Of Mechanical Sciences,* 40(1), pp. 15- 25, (1998).
7. Nefussi, G., Proslier, L., Gilormini, P., "Simulation of the cold-roll forming of circular tubes", *Journal Of Materials Processing Technology,* 95, pp. 216-221, (1999).
8. مالکیان، مهران، دانشی، غلامحسین، "بررسی طول تغییرشکل و نیرو در فرآیند شکل‌دهی غلتکی مقاطع کانال"، *نشریه‌ی مهندسی متالورژی*، شماره‌ی ۲، (۱۳۷۷).
9. Hong, S., Lee, S., Kim, N., "A parametric study on forming length in roll forming", *Journal Of Materials Processing Technology,* 113, pp. 774-778, (2001).
10. Lindgren, M., "Cold roll forming of a U-channel made of high strength steel", *Journal Of Materials Processing Technology,* 186, pp. 77–81, (2007).
11. Lindgren, M., "An improved model for the longitudinal peak strain in the flange of a roll formed U-channel developed by FE-analyses", *steel research institute,* 78 (1), pp. 82-87, (2007).
12. Bhattacharyya, D., Smith, P., "The development of longitudinal strain in cold roll forming and its influence on product straightness", *Journal of Mechanical Working Technology,* 1, pp. 422-427, (1984).
13. Lindgren, M., "Experimental and Computational Investigation of the Roll Forming Process", PhD thesis. Lulea, Sweden, (2009).
14. Ingvarsson, L., "Förenklad teori för rullformning av elementär V-profil", VAMP 15- rullforming, (2001).
15. Panton, S.M., Duncan, J.L., Zhu, S.D., "Longitudinal and shear strain development in cold roll forming", *Journal Of Materials Processing Technology,* 60, pp. 219-224, (1996).
16. McClure, C.K., Li, H., "Roll forming simulation using finite element analysis", *Society of Mechanical Engineers,* 8(2), pp. 114–119, (1995).